

Mathematik GK – Analysis

Musterlösung · Funktionsuntersuchung, Änderungsraten & Modellierung

Schwerpunkt

Funktionen & Modellierung

Niveau

Grundkurs

Ausgabe

2026

Bearbeitungszeit

90 Minuten

Vorgesehene Hilfsmittel

WTR (wissenschaftlicher
Taschenrechner) +
Formelsammlung

Gesamt-BE

60 BE

Aufgabe 1: Regelsignal eines Wärmespeichers

15 BE · 23 min

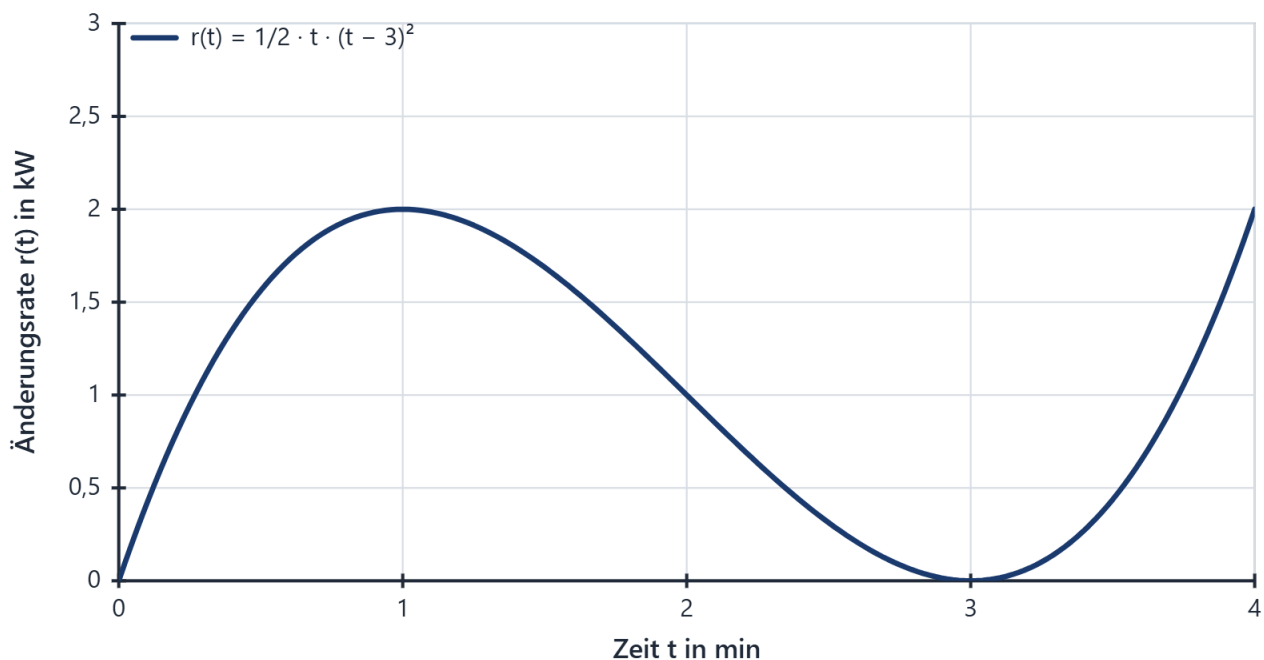
Bei einem neu entwickelten Wärmespeicher beschreibt die Funktion r in den ersten vier Minuten nach dem Start die momentane Änderungsrate der im Speicher enthaltenen thermischen Energie. Dabei ist t die Zeit in Minuten und $r(t)$ wird in kW angegeben. Es gilt

$$r(t) = \frac{1}{2}t(t-3)^2 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 4.$$

Eine Graphendarstellung von r veranschaulicht den Verlauf im betrachteten Zeitraum.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben zum Regelsignal.

Graph der Änderungsrate r



Graph von r im Zeitraum $0 \leq t \leq 4$.

- a) Berechnen Sie $r(2)$ und $r(4)$. 4 BE
- b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von r im betrachteten Zeitraum. 5 BE
- c) Bestimmen Sie rechnerisch die lokalen Extrempunkte des Graphen von r im Inneren des betrachteten Zeitraums und gleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Verlauf der Graphendarstellung ab. 6 BE

Erwartete Endergebnisse

$$r(2) = 1 \text{ kW}$$

$$r(4) = 2 \text{ kW}$$

Nullstellen: $t = 0$ und $t = 3$, wobei $t = 3$ eine doppelte Nullstelle ist.

Lokaler Hochpunkt $H(1 \mid 2)$, lokaler Tiefpunkt $T(3 \mid 0)$.

Teilaufgabe a)

Ansatz: Die beiden Zeitwerte werden in den gegebenen Funktionsterm eingesetzt.

Rechenweg:

$$1. r(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - 3)^2 = 1$$

$$2. r(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 - 3)^2 = 2$$

Ergebnis: Es gilt $r(2) = 1 \text{ kW}$ und $r(4) = 2 \text{ kW}$.

Teilaufgabe b)

Ansatz: Für die Nullstellen wird die Produktdarstellung von r verwendet.

Rechenweg:

$$1. \frac{1}{2}t(t - 3)^2 = 0$$

2. Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist: $t = 0$ oder $t - 3 = 0$.

3. Damit ist $t = 3$ wegen des quadrierten Faktors eine doppelte Nullstelle.

Ergebnis: Im Zeitraum $0 \leq t \leq 4$ liegen die Nullstellen bei $t = 0$ und $t = 3$.

Teilaufgabe c)

Ansatz: Die inneren Extremstellen werden mit der ersten Ableitung bestimmt und mit der zweiten Ableitung klassifiziert. Die Ergebnisse werden mit dem Graphen Graphendarstellung abgeglichen.

Teilaufgabe c)**Rechenweg:****Teilaufgabe c)**

1. Ausmultipliziert ist $r(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + \frac{9}{2}t$.

Teilaufgabe c)

2. $r'(t) = \frac{3}{2}t^2 - 6t + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(t-1)(t-3)$. Daher sind $t = 1$ und $t = 3$ die inneren kritischen Stellen.

Teilaufgabe c)

3. $r''(t) = 3t - 6$. Mit $r''(1) = -3 < 0$ liegt bei $t = 1$ ein lokales Maximum vor; $r(1) = 2$.

Teilaufgabe c)

4. Mit $r''(3) = 3 > 0$ liegt bei $t = 3$ ein lokales Minimum vor; $r(3) = 0$.

Teilaufgabe c)

5. Die berechneten Extrempunkte stimmen in Lage und Art mit dem Verlauf der Graphendarstellung überein.

Teilaufgabe c)

Ergebnis: Die lokalen Extrempunkte im Inneren sind $H(1 \mid 2)$ und $T(3 \mid 0)$; der Abgleich mit der Graphendarstellung ist vollständig konsistent.

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
a	Korrektes Einsetzen und Berechnen von $r(2)$.	2
a	Korrektes Einsetzen und Berechnen von $r(4)$.	2
b	Produktgleichung korrekt angesetzt.	1

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
b	Nullstelle $t = 0$ korrekt bestimmt.	1
b	Nullstelle $t = 3$ korrekt bestimmt.	1
b	Doppelte Vielfachheit bei $t = 3$ erkannt.	1

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
b	Beschränkung auf den betrachteten Zeitraum berücksichtigt.	1
c	Erste Ableitung korrekt gebildet und faktorisiert.	2
c	Kritische Stellen $t = 1$ und $t = 3$ korrekt bestimmt.	1

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
c	Extremstellen korrekt klassifiziert.	1
c	Funktionswerte und Extrempunkte korrekt angegeben.	1
c	Abgleich der berechneten Extrempunkte mit dem Graphenverlauf.	1

Bewertungsraster

Andere korrekte Lösungswege sind gleichwertig zu bewerten.

Aufgabe 2: Regenrückhaltebecken am Uferpark

33 BE · 49 min

Während eines zehnstündigen Regenereignisses beschreibt z den Nettozufluss eines Regenrückhaltebeckens, also Zufluss minus Abfluss. Für $0 \leq t \leq 10$ gilt

$$z(t) = -\frac{1}{10}(t-2)(t-8).$$

Dabei wird t in Stunden und $z(t)$ in Hunderten Kubikmetern pro Stunde gemessen. Eine Messwerttabelle enthält die Paare $t = 0, z(t) = -1,6$; $t = 2, z(t) = 0$; $t = 5, z(t) = 0,9$; $t = 8, z(t) = 0$; $t = 10, z(t) = -1,6$. Zum Zeitpunkt $t = 2$ enthält das Becken 4800 m^3 . Sein Fassungsvermögen beträgt 5200 m^3 . Ein positiver Wert von $z(t)$ bedeutet, dass der Beckeninhalt zunimmt.

Untersuchen Sie den Verlauf des Nettozuflusses und die daraus folgende Entwicklung des Beckeninhalts.

Messwerttabelle des Nettozuflusses

Zeit t (h)	Nettozufluss $z(t)$ (100 m^3/h)
0	-1,6
2	0
5	0,9
8	0
10	-1,6

Ausgewählte Messwerte von z im zehnstündigen Regenereignis.

- a) Untersuchen Sie, in welchen Zeiträumen der Beckeninhalt zu- beziehungsweise abnimmt, einschließlich Zeitpunkt und Wert des größten Nettozuflusses. 9 BE
- b) Berechnen Sie den Beckeninhalt zum Zeitpunkt $t = 8$. 10 BE
- c) Deuten Sie die Aussage $\int_0^2 z(t) dt = -\frac{22}{15}$ vollständig im Sachzusammenhang, insbesondere das Vorzeichen, den Betrag und die zugehörige Einheit. 6 BE
- d) Untersuchen Sie für den gesamten Zeitraum $0 \leq t \leq 10$, ob das Fassungsvermögen des Beckens überschritten wird. Verwenden Sie erforderlichenfalls die Angabe aus Teilaufgabe c als unabhängig nutzbares Zwischenergebnis. 8 BE

Erwartete Endergebnisse

Der Beckeninhalt nimmt auf $0 \leq t < 2$ und $8 < t \leq 10$ ab und auf $2 < t < 8$ zu; größter Nettozufluss bei $t = 5$ mit $z(5) = 0,9$, also $90 \text{ m}^3/\text{h}$.

Beckeninhalt bei $t = 8$: 5160 m^3 .

Von $t = 0$ bis $t = 2$ nimmt der Inhalt um $\frac{440}{3} \text{ m}^3 \approx 146,7 \text{ m}^3$ ab.

Das Fassungsvermögen wird nicht überschritten; maximale Füllmenge 5160 m^3 , Reserve 40 m^3 .

Teilaufgabe a)

Ansatz: Das Vorzeichen von z bestimmt die Zu- oder Abnahme des Beckeninhalts; das Maximum der nach unten geöffneten Parabel wird über den Scheitel bestimmt und mit der Messwerttabelle abgeglichen.

Rechenweg:

1. Aus $z(t) = -\frac{1}{10}(t-2)(t-8)$ folgen die Nullstellen $t = 2$ und $t = 8$.
2. Für $0 \leq t < 2$ und $8 < t \leq 10$ ist $z(t) < 0$, für $2 < t < 8$ ist $z(t) > 0$.
3. Die Symmetrieachse liegt bei $t = 5$; dort ist $z(5) = 0,9$. Der Wert stimmt mit Messwerttabelle überein.
4. Wegen der Einheit $100 \text{ m}^3/\text{h}$ entspricht dies $90 \text{ m}^3/\text{h}$.

Ergebnis: Der Beckeninhalt nimmt bis $t = 2$ ab, von $t = 2$ bis $t = 8$ zu und danach wieder ab. Der größte Nettozufluss beträgt bei $t = 5$ genau $90 \text{ m}^3/\text{h}$.

Teilaufgabe b)

Ansatz: Die Bestandsänderung von $t = 2$ bis $t = 8$ ergibt sich als bestimmtes Integral des Nettozuflusses unter Beachtung des Skalierungsfaktors 100.

Rechenweg:

1. Eine Stammfunktion ist $Z(t) = -\frac{1}{30}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{8}{5}t$.
2. $\int_2^8 z(t) dt = Z(8) - Z(2) = \frac{18}{5} = 3,6$.
3. Die Zunahme beträgt damit $3,6 \cdot 100 \text{ m}^3 = 360 \text{ m}^3$.
4. $4800 \text{ m}^3 + 360 \text{ m}^3 = 5160 \text{ m}^3$.

Ergebnis: Zum Zeitpunkt $t = 8$ enthält das Becken 5160 m^3 .

Teilaufgabe c)

Ansatz: Integralwert, Vorzeichen, Betrag und Einheit werden in den Sachzusammenhang übertragen.

Teilaufgabe c)**Rechenweg:****Teilaufgabe c)**

1. Das Integral beschreibt die Änderung des Beckeninhalts zwischen $t = 0$ und $t = 2$.

Teilaufgabe c)

2. Das negative Vorzeichen bedeutet eine Abnahme.

Teilaufgabe c)

3. Der Betrag ist $\frac{22}{15}$ in Hunderten Kubikmetern, also $\frac{22}{15} \cdot 100 \text{ m}^3 = \frac{440}{3} \text{ m}^3 \approx 146,7 \text{ m}^3$.

Teilaufgabe c)

Ergebnis: In den ersten zwei Stunden verliert das Becken netto etwa $146,7 \text{ m}^3$ Wasser.

Teilaufgabe c)

Deutung: Das Vorzeichen kennzeichnet die Abnahme des gespeicherten Wasservolumens; der Betrag gibt die verlorene Wassermenge an, nicht eine Zuflussrate.

Teilaufgabe d)

Ansatz: Randpunkte und Vorzeichenwechsel liefern die Kandidaten für das globale Maximum.

Rechenweg:

1. Auf $0 \leq t < 2$ fällt der Inhalt, auf $2 < t < 8$ steigt er und danach fällt er wieder.
Kandidaten für das globale Maximum sind daher $t = 0$ und $t = 8$.
2. Aus c folgt für den Anfangsbestand: $4800 \text{ m}^3 + 440/3 \text{ m}^3 \approx 4946,7 \text{ m}^3$.
3. Aus b folgt für $t = 8$ ein Beckeninhalt von 5160 m^3 . Wegen $4946,7 \text{ m}^3 < 5160 \text{ m}^3$ liegt das globale Maximum bei $t = 8$.
4. $5200 \text{ m}^3 - 5160 \text{ m}^3 = 40 \text{ m}^3$.

Ergebnis: Das Fassungsvermögen wird nicht überschritten; die kleinste Reserve beträgt 40 m^3 .

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
a	Nullstellen und Vorzeichenbereiche korrekt bestimmt.	3
a	Zu- und Abnahmeintervalle sachgerecht angegeben.	2
a	Zeitpunkt des größten Nettozuflusses korrekt bestimmt.	2

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
a	Maximalwert mit korrekter Einheit und Tabellenabgleich angegeben.	2
b	Bestandsänderung als bestimmtes Integral angesetzt.	2
b	Stammfunktion korrekt bestimmt.	2

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
b	Integralwert 3,6 korrekt berechnet.	2
b	Skalierungsfaktor in Kubikmeter korrekt berücksichtigt.	2
b	Beckeninhalt 5160 m^3 korrekt angegeben.	2

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
c	Integral als Bestandsänderung gedeutet.	2
c	Negatives Vorzeichen als Abnahme erklärt.	1
c	Betrag korrekt umgerechnet.	2

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
c	Einheit m^3 korrekt angegeben.	1
d	Maximum des Bestands bei $t = 8$ begründet.	3
d	Maximalen Beckeninhalt korrekt verwendet.	2

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
d	Vergleich mit dem Fassungsvermögen korrekt durchgeführt.	2
d	Reserve von 40 m^3 korrekt angegeben.	1

Bewertungsraster

Andere korrekte Lösungswege sind gleichwertig zu bewerten.

Aufgabe 3: Betriebsstrategien für einen Quartierspeicher

12 BE · 18 min

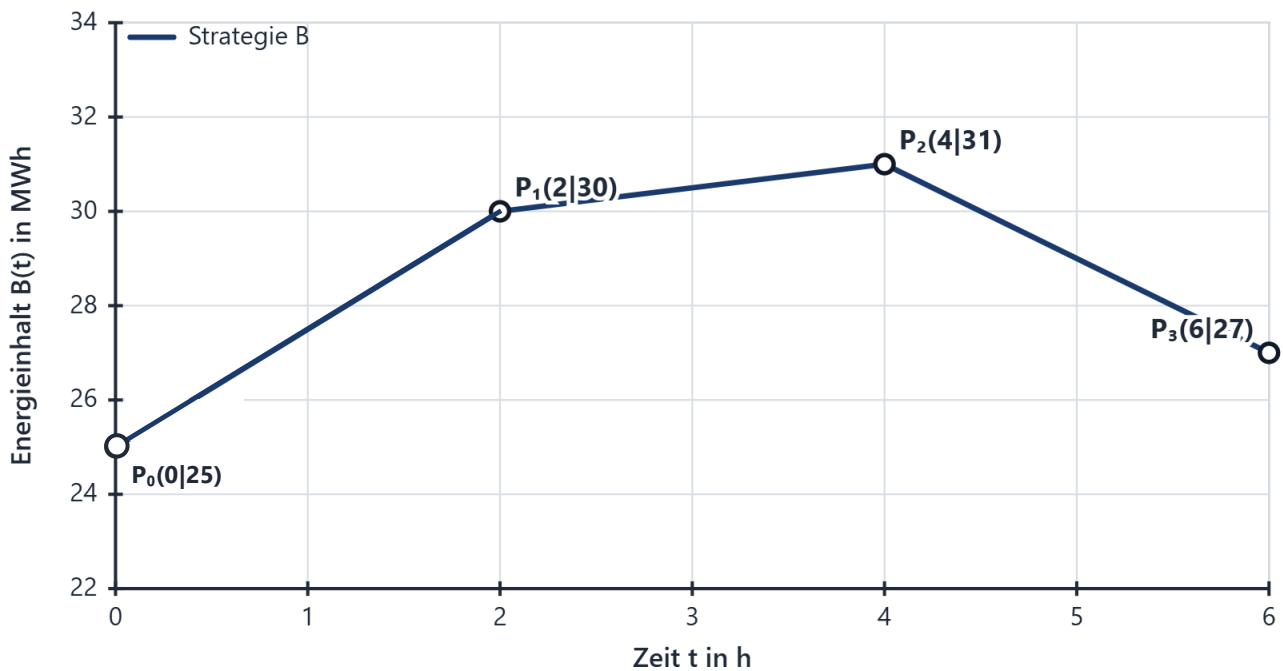
Ein Quartierspeicher soll während eines sechsständigen Versorgungsfensters betrieben werden. Der gespeicherte Energieinhalt muss jederzeit zwischen 22 MWh und 32 MWh liegen; am Ende sollen mindestens 26 MWh verfügbar sein. Strategie A wird für $0 \leq t \leq 6$ durch

$$A(t) = 25 + 6t - t^2$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $A(t)$ der Energieinhalt in MWh . Der Graph von Strategie B ist im betrachteten Zeitraum die durch Geradenstücke verbundene Linie durch $P_0(0 \mid 25)$, $P_1(2 \mid 30)$, $P_2(4 \mid 31)$ und $P_3(6 \mid 27)$. Messwerte zu Strategie B können um höchstens 1 MWh nach oben oder unten abweichen.

Vergleichen Sie die beiden Betriebsstrategien unter den genannten Anforderungen.

Stückweise lineare Strategie B



Die Stützpunkte sind im Modell durch Geradenstücke verbunden.

- Untersuchen Sie für beide Strategien, ob die Bereichsbedingung während des gesamten Versorgungsfensters und die Mindestvorgabe am Ende erfüllt werden. 5 BE
- Deuten Sie die Modellannahme, dass der Graph von Strategie B zwischen den angegebenen Punkten aus Geradenstücken besteht, und beziehen Sie eine daraus entstehende Grenze der Aussagekraft in Ihre Deutung ein. 3 BE
- Begründen Sie eine Empfehlung für eine der beiden Strategien. Berücksichtigen Sie dabei auch die angegebene mögliche Messabweichung bei Strategie B. 4 BE

Erwartete Endergebnisse

Strategie A verletzt mit 34 MWh die Obergrenze und endet mit 25 MWh unter der Mindestvorgabe. Strategie B erfüllt im Modell beide Vorgaben.

Die Geradenstücke modellieren zwischen den Stützpunkten konstante Änderungsraten; kurzfristige reale Schwankungen bleiben unberücksichtigt.

Empfehlung: Im stückweise linearen Modell erfüllt Strategie B auch unter Berücksichtigung der angegebenen Messabweichung die Vorgaben; für den tatsächlichen Verlauf zwischen den Messpunkten bleibt die in Teilaufgabe b) erläuterte Modellgrenze bestehen.

Teilaufgabe a)

Ansatz: Für Strategie A werden Scheitel und Randwerte untersucht; für Strategie B werden die im Datenplot linear verbundenen Stützpunkte ausgewertet.

Teilaufgabe a)**Rechenweg:****Teilaufgabe a)**

1. $A(t) = 25 + 6t - t^2 = 34 - (t - 3)^2$. Das Maximum liegt bei $t = 3$ und beträgt 34 MWh.

Teilaufgabe a)

2. $A(0) = 25$ MWh und $A(6) = 25$ MWh. Damit überschreitet A die Obergrenze 32 MWh und unterschreitet am Ende 26 MWh.

Teilaufgabe a)

3. Im Datenplot verläuft B linear durch die Werte 25, 30, 31 und 27 MWh.
Daher liegt B im Modell stets zwischen 25 und 31 MWh.

Teilaufgabe a)

4. Mit $B(6) = 27$ MWh erfüllt B auch die Mindestvorgabe am Ende.

Teilaufgabe a)

Ergebnis: Strategie A erfüllt weder die obere Bereichsbedingung noch die Endvorgabe. Strategie B erfüllt im Modell beide Anforderungen.

Teilaufgabe b)

Ansatz: Die lineare Verbindung wird als Modell für gleichmäßige Änderungen zwischen aufeinanderfolgenden Messzeitpunkten gedeutet.

Teilaufgabe b)

Rechenweg:

Teilaufgabe b)

1. Auf jedem Abschnitt wird eine konstante Änderungsrate angenommen.

Teilaufgabe b)

2. Die Steigungen betragen nacheinander $2,5 \text{ MWh/h}$, $0,5 \text{ MWh/h}$ und -2 MWh/h .

Teilaufgabe b)

3. Reale Zwischenwerte können von diesen Geraden abweichen; kurzfristige Spitzen oder Einbrüche werden durch die wenigen Stützpunkte nicht erfasst.

Teilaufgabe b)

Ergebnis: Die Geradenstücke liefern eine eindeutige Interpolation, aber keine sichere Aussage über kurzfristige reale Schwankungen zwischen den Stützpunkten.

Teilaufgabe b)

Deutung: Das Modell unterstellt abschnittsweise gleichmäßige Lade- beziehungsweise Entladevorgänge; seine Aussagekraft ist auf diesen idealisierten Verlauf begrenzt.

Teilaufgabe c)

Ansatz: Beide Strategien werden einschließlich der möglichen Messabweichung an allen Anforderungen verglichen.

Teilaufgabe c)

Rechenweg:

Teilaufgabe c)

1. Für B erweitert die Abweichung den möglichen Wertebereich von 25 bis 31 MWh auf 24 bis 32 MWh ; die Bereichsbedingung bleibt erfüllt.

Teilaufgabe c)

2. Am Ende kann B im ungünstigsten Fall $27 - 1 = 26 \text{ MWh}$ erreichen und erfüllt die Mindestvorgabe gerade noch.

Teilaufgabe c)

3. A scheidet wegen 34 MWh im Maximum und 25 MWh am Ende aus.

Teilaufgabe c)

4. 3 ist daher vorzuziehen; wegen fehlender Reserve an der Obergrenze und bei der Endvorgabe ist eine laufende Überwachung sinnvoll.

Teilaufgabe c)

Ergebnis: Strategie B ist die begründete Empfehlung. Sie erfüllt die Anforderungen auch unter der angegebenen Abweichung, jedoch nur mit geringer beziehungsweise keiner Reserve.

Bewertungsraster

Teilaufgabe	Kriterium	BE
a	Strategie A durch Scheitel- und Randwerte korrekt untersucht.	2
a	Verstöße von Strategie A korrekt benannt.	1
a	Wertebereich und Endwert von Strategie B korrekt aus dem Datenplot bestimmt.	2
b	Abschnittsweise konstante Änderungsrate korrekt gedeutet.	1
b	Bedeutung der linearen Interpolation erläutert.	1
b	Grenze der Aussagekraft durch mögliche Zwischenfluktuationen benannt.	1
c	Messabweichung für den gesamten Wertebereich korrekt berücksichtigt.	1
c	Worst-Case-Endwert 26 MWh korrekt bestimmt.	1
c	Empfehlung für Strategie B schlüssig begründet.	1
c	Geringe Sicherheitsreserve und Überwachungsbedarf berücksichtigt.	1

Andere korrekte Lösungswege sind gleichwertig zu bewerten.