

Mathematik GK – Analysis

Klausur · Funktionsuntersuchung, Änderungsraten & Modellierung

Schwerpunkt

Funktionen & Modellierung

Niveau

Grundkurs

Ausgabe

2026

Bearbeitungszeit

90 Minuten

Vorgesehene Hilfsmittel

WTR (wissenschaftlicher
Taschenrechner) +
Formelsammlung

Gesamt-BE

60 BE

Aufgabe 1: Regelsignal eines Wärmespeichers

15 BE · 23 min

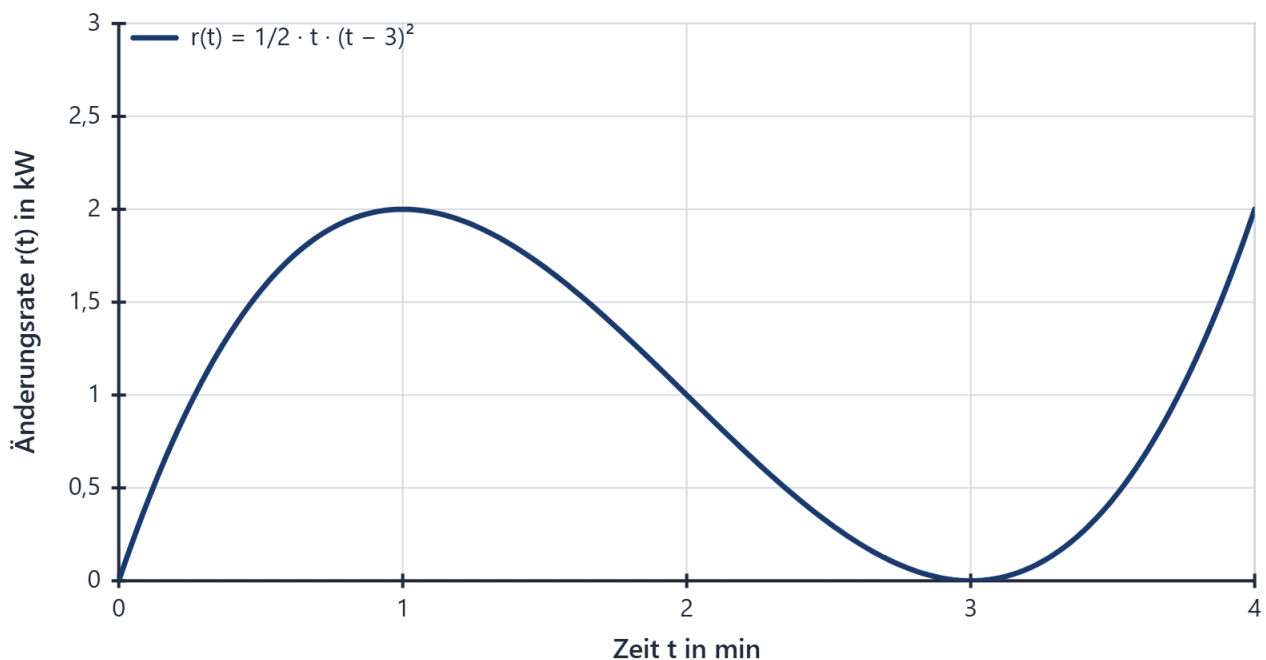
Bei einem neu entwickelten Wärmespeicher beschreibt die Funktion r in den ersten vier Minuten nach dem Start die momentane Änderungsrate der im Speicher enthaltenen thermischen Energie. Dabei ist t die Zeit in Minuten und $r(t)$ wird in kW angegeben. Es gilt

$$r(t) = \frac{1}{2}t(t-3)^2 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 4.$$

Eine Graphendarstellung von r veranschaulicht den Verlauf im betrachteten Zeitraum.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben zum Regelsignal.

Graph der Änderungsrate r



Graph von r im Zeitraum $0 \leq t \leq 4$.

- a) Berechnen Sie $r(2)$ und $r(4)$. 4 BE
- b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von r im betrachteten Zeitraum. Geben Sie gegebenenfalls die Vielfachheit an. 5 BE
- c) Bestimmen Sie rechnerisch die lokalen Extrempunkte des Graphen von r im Inneren des betrachteten Zeitraums und gleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Verlauf der Graphendarstellung ab. 6 BE

Aufgabe 2: Regenrückhaltebecken am Uferpark

33 BE · 49 min

Während eines zehnstündigen Regenereignisses beschreibt z den Nettozufluss eines Regenrückhaltebeckens, also Zufluss minus Abfluss. Für $0 \leq t \leq 10$ gilt

$$z(t) = -\frac{1}{10}(t-2)(t-8).$$

Dabei wird t in Stunden und $z(t)$ in Hunderten Kubikmetern pro Stunde gemessen. Eine Messwerttabelle enthält die Paare $t = 0, z(t) = -1,6$; $t = 2, z(t) = 0$; $t = 5, z(t) = 0,9$; $t = 8, z(t) = 0$; $t = 10, z(t) = -1,6$. Zum Zeitpunkt $t = 2$ enthält das Becken 4800 m^3 . Sein Fassungsvermögen beträgt 5200 m^3 . Ein positiver Wert von $z(t)$ bedeutet, dass der Beckeninhalt zunimmt.

Untersuchen Sie den Verlauf des Nettozuflusses und die daraus folgende Entwicklung des Beckeninhalts.

Messwerttabelle des Nettozuflusses

Zeit t (h)	Nettozufluss $z(t)$ (100 m^3/h)
0	-1,6
2	0
5	0,9
8	0
10	-1,6

Ausgewählte Messwerte von z im zehnstündigen Regenereignis.

- a) Untersuchen Sie, in welchen Zeiträumen der Beckeninhalt zu- beziehungsweise abnimmt, einschließlich Zeitpunkt und Wert des größten Nettozuflusses. 9 BE
- b) Berechnen Sie den Beckeninhalt zum Zeitpunkt $t = 8$. 10 BE
- c) Deuten Sie die Aussage $\int_0^2 z(t) dt = -\frac{22}{15}$ vollständig im Sachzusammenhang, insbesondere das Vorzeichen, den Betrag und die zugehörige Einheit. 6 BE

- d) Untersuchen Sie für den gesamten Zeitraum $0 \leq t \leq 10$, ob das Fassungsvermögen des Beckens überschritten wird. Verwenden Sie erforderlichenfalls die Angabe aus Teilaufgabe c als unabhängig nutzbares Zwischenergebnis.

8 BE

Aufgabe 3: Betriebsstrategien für einen Quartierspeicher

12 BE · 18 min

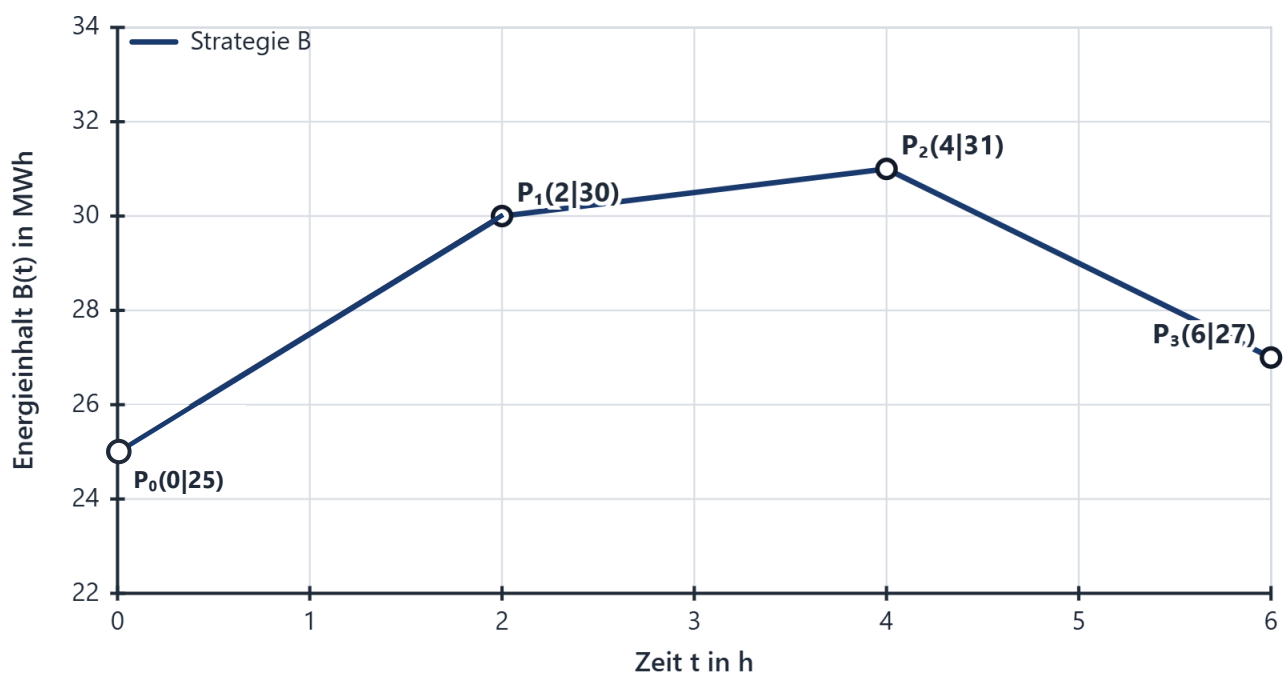
Ein Quartierspeicher soll während eines sechsständigen Versorgungsfensters betrieben werden. Der gespeicherte Energieinhalt muss jederzeit zwischen 22 MWh und 32 MWh liegen; am Ende sollen mindestens 26 MWh verfügbar sein. Strategie A wird für $0 \leq t \leq 6$ durch

$$A(t) = 25 + 6t - t^2$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $A(t)$ der Energieinhalt in MWh. Der Graph von Strategie B ist im betrachteten Zeitraum die durch Geradenstücke verbundene Linie durch $P_0(0 | 25)$, $P_1(2 | 30)$, $P_2(4 | 31)$ und $P_3(6 | 27)$. Messwerte zu Strategie B können um höchstens 1 MWh nach oben oder unten abweichen.

Vergleichen Sie die beiden Betriebsstrategien unter den genannten Anforderungen.

Stückweise lineare Strategie B



Die Stützpunkte sind im Modell durch Geradenstücke verbunden.

- a) Untersuchen Sie für beide Strategien, ob die Bereichsbedingung während des gesamten Versorgungsfensters und die Mindestvorgabe am Ende erfüllt werden.

5 BE

- b)** Deuten Sie die Modellannahme, dass der Graph von Strategie B zwischen den angegebenen Punkten aus Geradenstücken besteht, und beziehen Sie eine daraus entstehende Grenze der Aussagekraft in Ihre Deutung ein. 3 BE
- c)** Begründen Sie eine Empfehlung für eine der beiden Strategien. Berücksichtigen Sie dabei auch die angegebene mögliche Messabweichung bei Strategie B. 4 BE