

Mathematik GK – Analysis

Hinweise und Erklärungen · Funktionsuntersuchung, Änderungsraten & Modellierung

Schwerpunkt

Funktionen & Modellierung

Bearbeitungszeit

90 Minuten

Niveau

Grundkurs

Vorgesehene Hilfsmittel

**WTR (wissenschaftlicher
Taschenrechner) +
Formelsammlung**

Ausgabe

2026

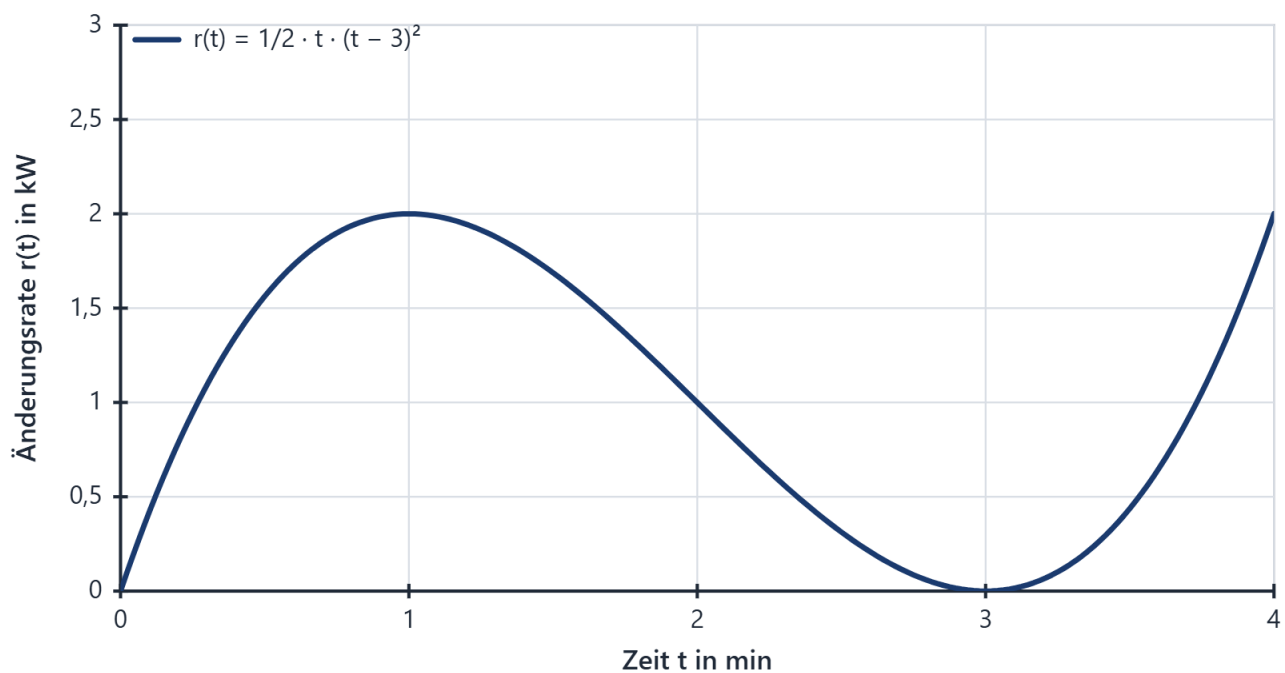
Gesamt-BE

60 BE

Aufgabe 1: Regelsignal eines Wärmespeichers

15 BE · 23 min

Graph der Änderungsrate r



Graph von r im Zeitraum $0 \leq t \leq 4$.

Aufgabentyp: Funktionsuntersuchung mit Term und Graph

So gehst du bei diesem Aufgabentyp vor

Aufgabentyp: Funktionsuntersuchung mit Term und Graph

Bei diesem Aufgabentyp verknüpfst du rechnerische Eigenschaften einer Funktion mit ihrer grafischen Darstellung. Du berechnest Funktionswerte, untersuchst Nullstellen und Extremstellen und nutzt den Graphen anschließend als Plausibilitätskontrolle.

Aufgabentyp: Funktionsuntersuchung mit Term und Graph

1. Lies zuerst Definitionsbereich, Einheiten und Fragestellung genau.

Aufgabentyp: Funktionsuntersuchung mit Term und Graph

2. Ordne jeder Teilaufgabe das passende Verfahren zu.

Aufgabentyp: Funktionsuntersuchung mit Term und Graph

3. Führe die Rechnung mit sauberer mathematischer Schreibweise aus.

Aufgabentyp: Funktionsuntersuchung mit Term und Graph

4. Prüfe, ob alle gefundenen Stellen im Definitionsbereich liegen.

Aufgabentyp: Funktionsuntersuchung mit Term und Graph

5. Vergleiche deine Ergebnisse mit dem Verlauf der Graphendarstellung.

Hinweise zu Teilaufgabe a)

Hinweis 1 Überlege, was du mit einem gegebenen Zeitpunkt im Funktionsterm tun musst.

Hinweis 2 Setze die beiden Zeitwerte nacheinander für t in $r(t)$ ein und beachte die Reihenfolgenfolge.

Hinweis 3 Schreibe für jeden Zeitwert einen eigenen Ansatz der Form $r(t_0) = \frac{1}{2}t_0(t_0 - 3)^2$ auf und vereinfache erst die Klammer, dann die Potenz.

Hinweise zu Teilaufgabe b)

Hinweis 1 Nutze die besondere Form des Funktionsterms.

Hinweise zu Teilaufgabe b)

Hinweis 2 Wende die Nullproduktregel auf die Faktoren an und achte auf die Vielfachheit.

Hinweise zu Teilaufgabe b)

Hinweis 3 Setze $\frac{1}{2}t(t-3)^2 = 0$ und untersuche getrennt, wann t beziehungsweise $(t-3)^2$ null wird.

Hinweise zu Teilaufgabe c)

Hinweis 1 Welche Bedingung erfüllen mögliche Extremstellen im Inneren des Intervalls?

Hinweis 2 Bilde $r'(t)$, löse $r'(t) = 0$ und klassifiziere die Stellen mit $r''(t)$ oder einem Vorzeichenwechsel.

Hinweis 3 Multipliziere den Term aus, bestimme die Ableitungen und setze die Lösungen von $r'(t) = 0$ in r und r'' ein. Vergleiche danach die erhaltenen Koordinaten mit dem Verlauf der Graphendarstellung.

Typische Fehler

- Du setzt Werte nur in einzelne Faktoren statt in den vollständigen Term ein.
- Du übersiehst bei einer quadrierten Klammer die Vielfachheit einer Nullstelle.
- Du gibst nur Extremstellen statt vollständiger Extrempunkte an.
- Du übernimmst Punkte aus dem Graphen, ohne sie rechnerisch zu bestätigen.
- Du berücksichtigst Stellen außerhalb des vorgegebenen Zeitraums.

Selbstkontrolle

- Passen Vorzeichen und Größenordnung deiner Funktionswerte zum Graphen?
- Hast du bei jeder Nullstelle alle Faktoren geprüft?
- Hast du zu jeder Extremstelle auch den Funktionswert bestimmt?
- Stimmen Art und Lage deiner Extrempunkte mit Graphendarstellung überein?

Formeln und Methoden zur Erinnerung

- Nullproduktregel: Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist.

Formeln und Methoden zur Erinnerung

- Notwendige Bedingung für eine innere Extremstelle: $r'(t) = 0$.

Formeln und Methoden zur Erinnerung

- Für eine kritische Stelle t_0 mit $r'(t_0) = 0$ gilt:
 $r''(t_0) < 0$: lokales Maximum; $r''(t_0) > 0$: lokales Minimum.

Aufgabe 2: Regenrückhaltebecken am Uferpark

33 BE · 49 min

Messwerttabelle des Nettozuflusses

Zeit t (h)	Nettozufluss $z(t)$ (100 m ³ /h)
0	-1,6
2	0
5	0,9
8	0
10	-1,6

Ausgewählte Messwerte von z im zehnstündigen Regenereignis.**Aufgabentyp: Modellierungsaufgabe mit Änderungsrate und Bestand****So gehst du bei diesem Aufgabentyp vor**

Bei diesem Aufgabentyp beschreibt eine Funktion die momentane Änderung eines Bestands. Du liest Zu- und Abnahme aus dem Vorzeichen ab, nutzt Ableitungen für Extremwerte der Rate und bestimmte Integrale für Bestandsänderungen. Einheiten und Sachdeutung gehören immer zur Rechnung.

1. Kläre zuerst, welche Größe die Funktion und welche Größe ihr Integral beschreibt.
2. Bestimme Nullstellen und Vorzeichenbereiche der Änderungsrate.
3. Untersuche besondere Werte der Änderungsrate mit einem passenden Verfahren.
4. Berechne Bestandsänderungen mit bestimmten Integralen und beachte Skalierungsfaktoren.
5. Vergleiche den größten möglichen Bestand mit der Kapazität und formuliere eine Sachantwort.

Hinweise zu Teilaufgabe a)

Hinweis 1 Überlege, welches Vorzeichen der Nettozufluss beim Steigen beziehungsweise Fallen des Beckeninhalts hat.

Hinweise zu Teilaufgabe a)

Hinweis 2 Bestimme die Nullstellen von z , untersuche die Vorzeichen in den entstehenden Intervallen und finde den Scheitel der Parabel.

Hinweise zu Teilaufgabe a)

Hinweis 3 Nutze die Produktdarstellung für die Vorzeichenintervalle. Bestimme anschließend die Symmetrieachse zwischen den beiden Nullstellen und setze diesen Zeitpunkt in z ein; gleiche deine Rechnung mit der Messwerttabelle ab.

Hinweise zu Teilaufgabe b)

Hinweis 1 Gesucht ist ein Bestand, gegeben ist aber eine Änderungsrate.

Hinweis 2 Berechne die Bestandsänderung mit einem bestimmten Integral vom bekannten Ausgangszeitpunkt bis zum Zielzeitpunkt.

Hinweis 3 Bilde eine Stammfunktion von $z(t) = -\frac{1}{10}(t-2)(t-8)$, werte das passende bestimmte Integral aus und multipliziere wegen der Einheit mit 100. Addiere die Änderung zum bekannten Beckeninhalt.

Hinweise zu Teilaufgabe c)

Hinweis 1 Trenne bei deiner Deutung Vorzeichen, Betrag und Einheit.

Hinweis 2 Deute das Integral als gesamte Bestandsänderung im angegebenen Zeitintervall.

Hinweis 3 Erkläre zuerst, ob der Bestand zu- oder abnimmt. Rechne anschließend den Betrag aus Hunderten Kubikmetern in Kubikmeter um und grenze die Wassermenge von einer Zuflussrate ab.

Hinweise zu Teilaufgabe d)

Hinweis 1 Prüfe alle Kandidaten für ein globales Maximum: Randpunkte und Stellen, an denen die Änderungsrate ihr Vorzeichen wechselt.

Hinweise zu Teilaufgabe d)

Hinweis 2 Lokalisiere mit dem Vorzeichenwechsel von z die inneren Kandidaten und vergleiche deren Bestände anschließend mit den Randwerten.

Hinweise zu Teilaufgabe d)

Hinweis 3 Prüfe die durch die Nullstellen getrennten Zeitabschnitte. Vergleiche insbesondere den Anfangsbestand mit dem Bestand bei $t = 8$, bevor du den globalen Höchststand und die Kapazitätsreserve angibst.

Typische Fehler

- Du verwechselst den maximalen Nettozufluss mit dem maximalen Beckeninhalt.
- Du vergisst den Faktor 100 beim Übergang von der Tabellen- oder Integralgröße zu Kubikmetern.
- Du deutest ein Integral als Rate statt als Bestandsänderung.
- Du vergleichst nur einzelne Messwerte aus der Tabelle und nicht den gesamten Zeitraum.
- Du lässt in der Sachantwort Einheit oder Vorzeichenbedeutung weg.

Selbstkontrolle

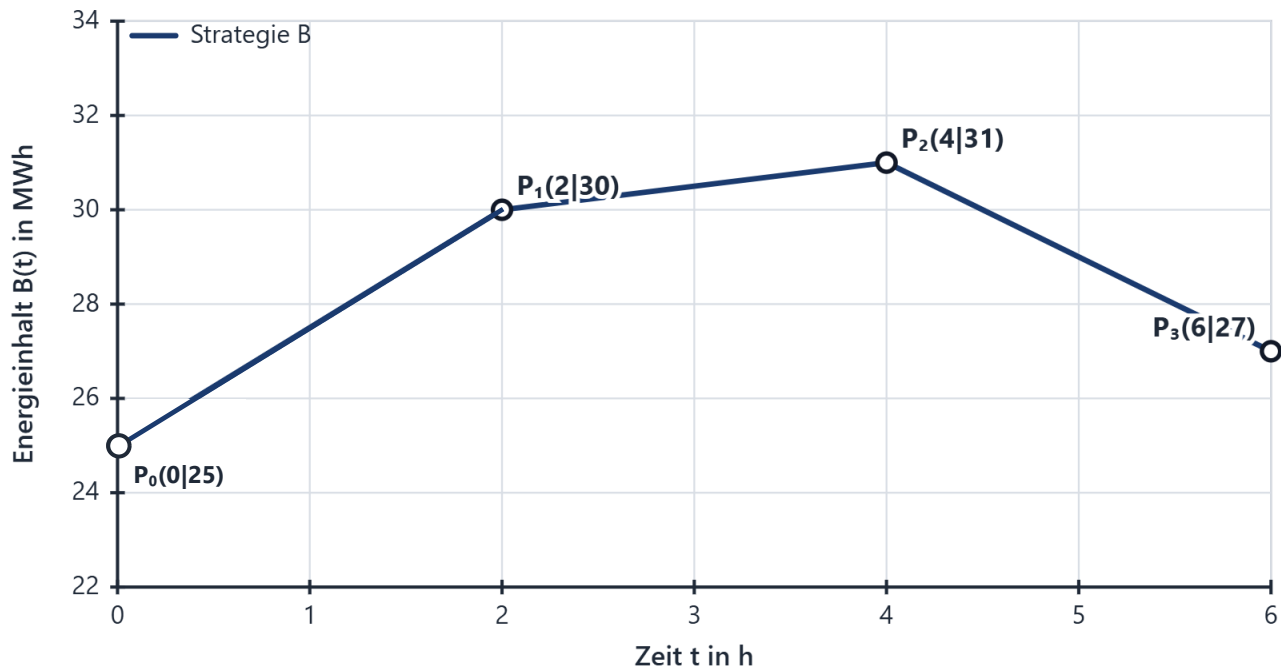
- Stimmen deine Vorzeichenbereiche mit den Werten in der Messwerttabelle überein?
- Hast du beim Integral die Einheit von Rate mal Zeit korrekt umgewandelt?
- Liegt der größte Bestand an einem Zeitpunkt, an dem die Änderungsrate ihr Vorzeichen passend wechselt?
- Hast du die Reserve zur Kapazitätsgrenze ausdrücklich angegeben?

Formeln und Methoden zur Erinnerung

- Bestandsänderung: $\Delta V = \int_a^b z(t) dt$ mit passender Skalierung.
- Bei einer quadratischen Funktion liegt die Symmetrieachse in der Mitte ihrer beiden Nullstellen.
- Ein Bestand wächst für positive Änderungsrate und fällt für negative Änderungsrate.

Aufgabe 3: Betriebsstrategien für einen Quartierspeicher

12 BE · 18 min

Stückweise lineare Strategie B

Die Stützpunkte sind im Modell durch Geradenstücke verbunden.

Aufgabentyp: Vergleich und Beurteilung zweier Funktionsmodelle**So gehst du bei diesem Aufgabentyp vor**

Bei diesem Aufgabentyp prüfst du mehrere Modelle an gemeinsamen Anforderungen und begründest eine Entscheidung. Dazu bestimmst du Wertebereiche und Endwerte, deutest die Modellannahmen kritisch und berücksichtigst Unsicherheiten, bevor du eine Empfehlung formulierst.

1. Übersetze jede Anforderung in eine mathematisch prüfbare Bedingung.
2. Untersuche jedes Modell über den gesamten Definitionsbereich und am Endpunkt.
3. Lies grafische Daten sorgfältig ab und beachte die Art der Verbindung zwischen Stützpunkten.
4. Berücksichtige angegebene Abweichungen mit günstigen und ungünstigen Grenzfällen.
5. Formuliere eine Empfehlung, die Ergebnisse, Reserven und Modellgrenzen abwägt.

Hinweise zu Teilaufgabe a)

Hinweis 1 Prüfe für jede Strategie sowohl den gesamten Verlauf als auch den Endzeitpunkt.

Hinweise zu Teilaufgabe a)

Hinweis 2 Bringe $A(t)$ in Scheitelpunktform oder bestimme Scheitel und Randwerte. Lies für B Minimum, Maximum und Endwert aus dem Datenplot ab.

Hinweise zu Teilaufgabe a)

Hinweis 3 Untersuche $A(t) = 25 + 6t - t^2$ auf dem abgeschlossenen Intervall über Scheitel und Randwerte. Nutze bei B, dass lineare Geradenstücke ihre Extremwerte an den Stützpunkten annehmen, und vergleiche alle Werte mit beiden Vorgaben.

Hinweise zu Teilaufgabe b)

Hinweis 1 Frage dich, was die geraden Verbindungen über den Verlauf zwischen zwei Messzeitpunkten behaupten.

Hinweis 2 Deute jedes Segment als konstante mittlere Änderungsrate und unterscheide Modellverlauf und möglichen realen Verlauf.

Hinweis 3 Berechne gedanklich die Steigung jedes Geradenstücks aus der Änderung des Energieinhalts pro Zeit. Erkläre dann, welche kurzfristigen Schwankungen durch eine lineare Interpolation nicht sichtbar werden.

Hinweise zu Teilaufgabe c)

Hinweis 1 Eine Empfehlung muss auch im ungünstigsten zulässigen Abweichungsfall tragen.

Hinweis 2 Erweitere die modellierten Werte von B nach oben und unten um die angegebene Messabweichung und prüfe erneut Bereich und Endwert.

Hinweis 3 Bilde für B Worst-Case-Grenzen aus Minimum minus Abweichung, Maximum plus Abweichung und Endwert minus Abweichung. Vergleiche diese mit den Anforderungen und stelle ihnen die Verstöße von A gegenüber, ohne geringe Reserven zu verschweigen.

Typische Fehler

- Du prüfst nur die angegebenen Stützpunkte, ohne die linearen Zwischenstücke zu begründen.

Typische Fehler

- Du betrachtest bei Strategie A nur die Randwerte und übersiehst den Scheitel.

Typische Fehler

- Du addierst die Messabweichung nur in eine Richtung.

Typische Fehler

- Du prüfst den Wertebereich, vergisst aber die gesonderte Mindestvorgabe am Ende.

Typische Fehler

- Du gibst eine Empfehlung ohne mathematische Begründung oder ohne Hinweis auf geringe Reserven.

Selbstkontrolle

- Hast du Minimum, Maximum und Endwert beider Strategien geprüft?
- Ist deine Aussage über B mit allen Stützpunkten und Geradenstücken im Datenplot vereinbar?
- Hast du die Abweichung sowohl nach oben als auch nach unten berücksichtigt?
- Bleibt deine Empfehlung auch im ungünstigsten Fall nachvollziehbar?

Formeln und Methoden zur Erinnerung

- Scheitelpunktform einer nach unten geöffneten Parabel: $a(t - t_S)^2 + y_S$ mit $a < 0$.
- Steigung eines Geradenstücks: $m = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$.
- Worst-Case-Prüfung: Minimum minus Abweichung, Maximum plus Abweichung und Endwert minus Abweichung.